هندسة الميكانيك العام

السنة الثانية

فريق الكرّيات الحمراء التطوعي

نظري 21 6 11

11/11/2015

التكاملات الشعاعية و السطوح

د. منير الترك

RBC HAMAK

رياضيات 3

التكاملات الشعاعية:

الجولان :

لنعتبر أن منحني فراغي Γ موجه وفقا لشعاع توجيه المماس في كل نقطة من المنحني حيث أن Γ منحني صقيل أملس و أن $u = u(x, y, z)$

$$\vec{F} = f(x)\vec{i} + f(y)\vec{j} + f(z)\vec{k}$$

حيث أن كلا من u, f توابع مستمرة على Γ

إن تعريف جولان الشعاع $\vec{F}$ (الحقل $\vec{F}$) حول المنحني Γ هو التكامل الخطي

$$\int_{\Gamma} \vec{F}d(\vec{l})$$

حيث أن $d(l)$ طول قوس صغير على Γ ويساوي إلى

$$d(\vec{l}) = \frac{d(x)}{d\vec{i}} + \frac{d(y)}{d\vec{j}} + \frac{d(z)}{d\vec{k}}$$

وبالتالي فإن

$$\int_{\Gamma} \vec{F}d(\vec{l}) = \int_{\Gamma} F(x)d(x) + F(y)d(y) + F(z)d(z)$$

ولإن هذا التكامل مرتبط بمسار المكاملة على Γ و بالجهة

إذا كان $\vec{F}$ كمونيا فإن الجولان حول Γ سوف يكون مستقلا عن المسار و يكون التكامل بالشكل التالي:

$$\int_{\Gamma} \vec{F}\, d(\vec{l}) = F(b) - F(a)$$

حيت أن a, b نقطتا البداية و النهاية ل Γ

إذا كان $\vec{F}$ كمونيا و مغلقا (أي نهايته منطبقة على بدايته) فإن:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F}\, d(\vec{l}) = 0$$

إذا وجدت دائرة في التكامل فإنها تدل على ان المنحني مغلق وليس مفتوح أي كالقطع الناقص

وإذا اعتبرنا أن $\vec{F}$ قوة مستمرة فإن الجولان هو عبارة عن القوة $\times$ الانتقال

وهو مايسمى العمل الذي تقوم به $\vec{F}$ عند الانتقال على المنحني Γ

مثال:

احسب جولان التابع الشعاعي :

$$\vec{F} = 2y\vec{i} + 3x\vec{j} - z^2\vec{k}$$

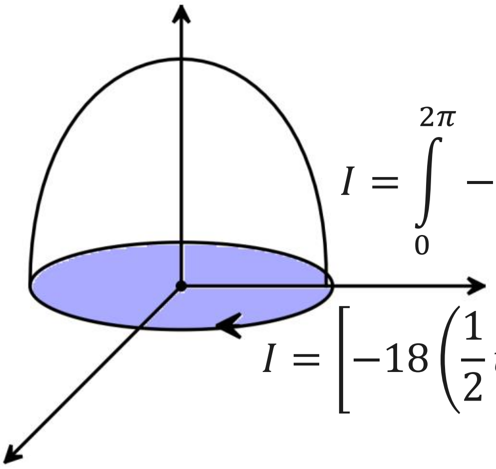
حول السطحين: $z = 0$ و $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

الحل:

$$x = 3COS(t) \Rightarrow d(x) = -3Sin(t)d(t)$$
$$y = 3Sin(t) \Rightarrow d(y) = 3COS(t)d(t)$$

$$I = \oint_{\Gamma} \vec{F}\, d(\vec{l})$$

$$I=\int_{0}^{2\pi} 6\ Sin(t)\big(-3Sin(t)\mathrm{d}(\mathrm{t})\big)+9COS(t)\big(3COS(t)\mathrm{d}(\mathrm{t})\big)$$



$$I=\int_{0}^{2\pi} -18\ Sin^2(t)\mathrm{d}(\mathrm{t})+27COS^2(t)\mathrm{d}(\mathrm{t})$$

$$I=\left[-18\left(\frac{1}{2}t-\frac{Sin(2t)}{4}\right)+27\left(\frac{1}{2}t+\frac{Sin(2t)}{4}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$I=\left(-9\times 2\pi+\frac{27}{2}(2\pi)\right)=9\pi$$

نظرية غاوص في التفريق: حجم $\Longrightarrow$ سطح

إن تدفق الحقل الشعاعي $\vec{\mathrm{F}}$ على السطح المغلق يساوي إلى التكامل الحجمي لتفرق الحقل $\vec{\mathrm{F}}$ إلى الحجم الذي يحدهΣ

ونكتب:

$$=\iint_{\Sigma}\vec{\mathrm{F}}\,d(\vec{s})\iiint_{V}\vec{\nabla}.\vec{F}d(v)$$

إن التحويل يتم من سطح موجه مغلق إلى تكامل حجمي على المنطقة المحاطة بهذا السطح

وإن الدوران و التدرج يتم بنفس الشكل

مثال: سؤال امتحاني

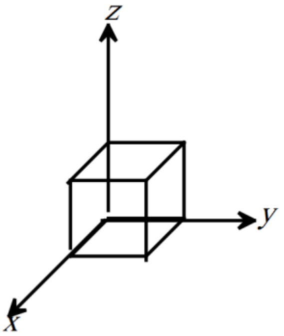
اذكر نص نظرية غاوص في التفرق و احسب قيمة تدقق الحقل $\vec{F}$

$$\vec{F}=4\mathrm{xz}\vec{\imath}$$

عبر السطح الموجه و المعين ب:

$$x = y = z = 0$$
$$x = y = z = 1$$

غالبا ما نستخدم التكامل الثلاثي في نظرية غاوص هذا يعني أنه علينا حساب $\vec{\nabla}.\vec{F}$في التكامل الثلاثي



$$\vec{\nabla}.\vec{F} = 4z - 2y + y = 4z - y$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (4z - y)d(x)d(y)d(z)$$

$$\int_0^1\int_0^1 [4zx - yx]_0^1 d(y)d(z) = \int_0^1\int_0^1 (4z - y)d(y)d(z)$$

$$\int_0^1 \left[4zy - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \int_0^1 4z - \frac{1}{2}\, d(z) = \left[2z^2 - \frac{1}{2}z\right]_0^1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

نظرية ستوكس خطي $\Rightarrow$ سطحي

سؤال امتحاني:

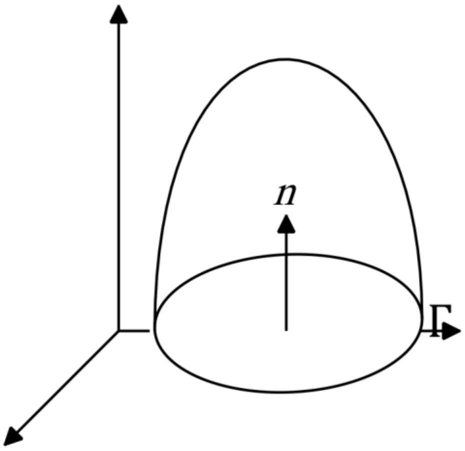
اكتب نص نظرية ستوكس

ليكن Σسطح صقيل موجود في نطاق فراغي v عندئذ إن تدفق دوران الحقل الشعاعي $\vec{F}$عبر السطح Σ يساوي إلى جولان $\vec{F}$على هذا الحقل على المنحني المغلقΓ الذي يحدد السطح Σ

ونكتب:

$$\iint_{\Sigma} \vec{\nabla}\wedge \vec{F} d(\vec{s}) = \oint_{\Gamma} \vec{F} d(\vec{s})$$

في هذه النظرية يمكن استخدام الشقين التكامل الخطي و التكامل السطحي الثنائي و أحيانا يطلب منا التحقق من ستوكس فعندئذ علينا إجراء الشقين بان معا لنحصل على نفس الجواب



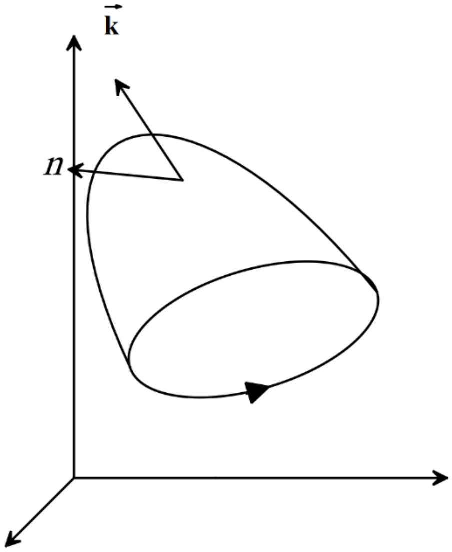
مسألة:

حقق نظرية ستوكس من أجل الحقل $\vec{F}$

$$\vec{F} = xy\vec{\imath} - x\vec{\jmath} + xz\vec{k}$$

حيث Γ **أن هو المنحني الناتج من تقاطع نصف الكرة العلوي** $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

مع المستوي $z = 0$

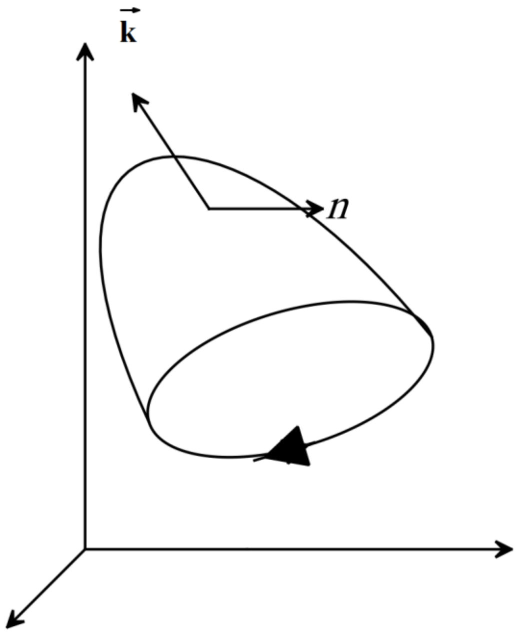


سيتم حل هذه المسألة في المحاضرة القادمة

إن المنحني الموجه وفقا لوجه مماسه $\hat{T}$ **يقابله سطح موجه وفقا لوجه ناظمه** $\vec{n}$

السطح المفتوح:

إذا كان سطحا Σ **صقيلا و بسيطا في إحدى الاتجاهات وليكن OZ وله حافة صقيلة أو صقيلة جزئيا فإن لهذا السطح وجهان وذلك بالنسبة للناظم** $\vec{n}$**لأنه في نقطة من السطح يمكن أن يوجه الناظم** $\vec{n}$ **بحيث يصنع زاوية حادة مع** $\vec{k}$**(الجهة الموجبة ل Z) كما في الشكل:**



أو زاوية منفرجة مع $\vec{k}$ **بعد ملاحظة ان الناظم هو شعاع مستمر و يتغير من نقطة إلى أخرى ولتعيين جهة الناظم فقد اصطلح اعتبار الناظم** $\vec{n}$ **موجها باتجاه تقدم البزال (البرغي) يدور وفق طريقة توجيه منحني** Γ

و إذا كانت حافة Γ منحنيا مستويا و موجها بالتجاه الموجب فإن جهة الناظم $\vec{n}$ على السطح Σ تكون عمودية باتجاهΓ

ملاحظة: ما انطبق على OZ ينطبق على السطح الصقيل بالنسبة ل OYgOX

السطح المغلق:

إذا كان سطح مغلق Σ فهو سطح ذو وجهين وقد اصطلح اعتبار$\vec{n}$ موجبا دوما خارج السطح

وبالتالي إذا كانت s مساحة السطح فإن عنصر السطح ds الموجه يساوي $d\vec{s} = \hat{n}\, ds$

وظيفة :

احسب جولان التابع التالي:

$$\vec{F} = \mathrm{x}^2\vec{\imath} + yx\vec{\jmath} + yxz\vec{k}$$

على المنحني الناتج من تقاطع الأسطوانة $x^2 + y^2 = 1$ مع $z = 0$

الجواب 0

$$2)\ \ \vec{F} = (2y - x)\vec{\imath} + 2zyx\vec{\jmath} - z^2\vec{k}$$

حول جزء من الدائرة $x^2 + y^2 = 4$ في الربع الأول

الجواب2π

احسب تدفق الحقل:

$\vec{F} = \mathrm{x}^3\vec{\imath} + y^3\vec{\jmath} + z^3\vec{k}$ على السطح المحدد ب $z = 1 - x^2 - y^2$ و $z = 0$

الجواب $\frac{5\pi}{6}$

$$\vec{F} = (y + x)\vec{\imath} + (x + y^2 + z)\vec{\jmath} + (y + z^2)\vec{k}$$

على السطح المحدد ب $z = 2,$ $z = 0$ و $x^2 + y^2 = 1$

الجواب6π